



Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2025

Ediția a 16-a,

Focșani, 15 februarie 2025

Enunțuri, soluții și bareme, clasa a 9-a

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left[\frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} \right] + \left[\frac{2x}{x^2 + 2x + 1} \right] + \left[\frac{1}{x^2 + 2x + 1} \right] = 1.$$

Emil Vasile, Ploiești

Soluție. Folosind inegalitatea părții întregi, rezultă:

$$1 = \left[\frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} \right] + \left[\frac{2x}{x^2 + 2x + 1} \right] + \left[\frac{1}{x^2 + 2x + 1} \right] \leq \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} + \frac{2x}{x^2 + 2x + 1} + \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = 1. \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $\frac{x^2}{x^2 + 2x + 1}, \frac{2x}{x^2 + 2x + 1}, \frac{1}{x^2 + 2x + 1} \in \mathbb{Z}$. $\dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Deoarece $\frac{2x}{x^2 + 2x + 1} : \frac{1}{x^2 + 2x + 1} = 2x \in \mathbb{Q}$, rezultă că $x \in \mathbb{Q}$. $\dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Fie $\frac{1}{(x+1)^2} = a \in \mathbb{N}^*$. Cum $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, rezultă că $a = k^2$, cu $k \in \mathbb{N}^*$. $\dots\dots\dots \mathbf{3p}$

Obținem $x = -1 \pm \frac{1}{k}$, cu $k \in \mathbb{N}^*$, care verifică ecuația inițială, deci sunt soluții. $\dots\dots \mathbf{1p}$

Problema 2. a) Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și orice număr natural nenul k ,

$$\text{are loc inegalitatea: } \left| x - \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} \right| + \left| x + \frac{1}{2k \cdot (2k+1)} \right| \geq \frac{2}{4k^2-1}.$$

b) Demonstrați că există un unic șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, cu proprietatea că pentru orice număr natural nenul n au loc inegalitățile:

$$\left| a_1 - \frac{1}{1 \cdot 2} \right| + \left| a_2 - \frac{1}{3 \cdot 4} \right| + \left| a_3 - \frac{1}{5 \cdot 6} \right| + \dots + \left| a_n - \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} \right| \leq \frac{n}{2n+1},$$

$$\left| a_1 + \frac{1}{2 \cdot 3} \right| + \left| a_2 + \frac{1}{4 \cdot 5} \right| + \left| a_3 + \frac{1}{6 \cdot 7} \right| + \dots + \left| a_n + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)} \right| \leq \frac{n}{2n+1}.$$

Cristian Heuberger, Baia Mare

Soluție. a) $\left| x - \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} \right| + \left| x + \frac{1}{2k \cdot (2k+1)} \right| \geq \left| \left(\frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} - x \right) + \left(x + \frac{1}{2k \cdot (2k+1)} \right) \right|$, deci

$$\left| x - \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} \right| + \left| x + \frac{1}{2k \cdot (2k+1)} \right| \geq \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} + \frac{1}{2k \cdot (2k+1)} = \frac{2}{4k^2-1}. \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

b) Din a), obținem: $\left| a_k - \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} \right| + \left| a_k + \frac{1}{2k \cdot (2k+1)} \right| \geq \frac{1}{(2k-1) \cdot 2k} + \frac{1}{2k \cdot (2k+1)}. \quad (1)$

Adunând cele două inegalități din ipoteză, notând cu S_n suma modulelor și folosind (1) obținem: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)} \leq S_n \leq \frac{2n}{2n+1}$, prin urmare $\frac{2n}{2n+1} \leq S_n \leq \frac{2n}{2n+1}$, deci $S_n = \frac{2n}{2n+1}$ **1p**

Mai mult, cele două inegalități din problemă trebuie să fie egalități. **1p**

Fie $b_n := |a_1 - \frac{1}{1 \cdot 2}| + |a_2 - \frac{1}{3 \cdot 4}| + |a_3 - \frac{1}{5 \cdot 6}| + \dots + |a_n - \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}| = \frac{n}{2n+1}$ și $c_n := |a_1 + \frac{1}{2 \cdot 3}| + |a_2 + \frac{1}{4 \cdot 5}| + |a_3 + \frac{1}{6 \cdot 7}| + \dots + |a_n + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)}| = \frac{n}{2n+1}$.

Avem $b_1 = |a_1 - \frac{1}{1 \cdot 2}| = \frac{1}{3} = |a_1 + \frac{1}{2 \cdot 3}| = c_1$, de unde obținem $a_1 = \frac{1}{6}$ **1p**

Pentru $n \geq 2$, avem $b_n = b_{n-1} + |a_n - \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}|$, deci $\frac{n}{2n+1} = \frac{n-1}{2n-1} + |a_n - \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}|$, și deducem că $a_n \in \left\{ \frac{1}{2n(4n^2-1)}, \frac{4n+1}{2n(4n^2-1)} \right\}$. (2) **1p**

Dar $c_n = c_{n-1} + |a_n + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)}|$, deci $\frac{n}{2n+1} = \frac{n-1}{2n-1} + |a_n + \frac{1}{2n \cdot (2n+1)}|$, prin urmare $a_n \in \left\{ \frac{1}{2n(4n^2-1)}, \frac{-4n+1}{2n(4n^2-1)} \right\}$. Folosind (2), obținem $a_n = \frac{1}{2n(4n^2-1)}$, pentru orice $n \geq 2$. Cum $a_1 = \frac{1}{6}$, rezultă că $a_n = \frac{1}{2n(4n^2-1)}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ **1p**

Problema 3. Se consideră un patrulater convex $ABCD$, cu $\{O\} = AC \cap BD$, astfel încât $AC < 2 \cdot OC$ și $BD < 2 \cdot OB$. Alegem punctele M, N, P, Q pe laturile AB, BC, CD , respectiv DA , astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NB} = \frac{PC}{PD} = \frac{QA}{QD} = k > 0$.

Fie $\{T\} = MP \cap NQ$. Demonstrați că:

- a) $O \notin MP$;
- b) $T \notin AC \cup BD$;
- c) (OT) este bisectoarea lui \widehat{BOC} dacă și numai dacă $k = \frac{2 \cdot OC - AC}{2 \cdot OB - BD}$.

Dana Heuberger, Baia Mare, Enache Pătrașcu, Focșani

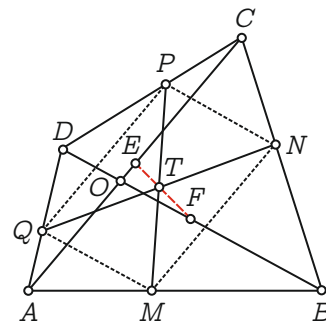
Soluție. a) Presupunem că $O \in MP$.

$$\vec{OM} = \frac{1}{1+k} (\vec{OA} + k\vec{OB}), \vec{OP} = \frac{1}{1+k} (\vec{OC} + k\vec{OD}),$$

deci $\vec{OP} = -\frac{1}{1+k} \cdot \frac{OC}{OA} \cdot \vec{OA} - \frac{k}{1+k} \cdot \frac{OD}{OB} \cdot \vec{OB}$ **1p**

$O \in MP$ dacă și numai dacă coeficienții vectorilor \vec{OM} și \vec{OP} în baza (\vec{OA}, \vec{OB}) sunt proporționali. Obținem: $1 < \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} < 1$, fals. Așadar $O \notin MP$ **1p**

b) Fie E mijlocul lui (AC) și F mijlocul lui (BD) . Din teorema lui Thales rezultă că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram. **1p**



T este mijlocul lui (MP) , deci obținem:

$$\vec{TM} + \vec{MP} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{1+k} (\vec{TA} + k\vec{TB} + \vec{TC} + k\vec{TD}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{TA} + \vec{TC}) + k(\vec{TB} + \vec{TD}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{TE} + k\vec{TF} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{TE} = -k\vec{TF},$$

prin urmare $T \in (EF)$, deci

$T \in \text{Int}(\widehat{BOC})$, așadar $T \notin AC \cup BD$ **2p**

c) Fie $\vec{i} = \frac{1}{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$ și $\vec{j} = \frac{1}{BD} \cdot \overrightarrow{DB}$.

(OT este bisectoarea lui $\widehat{BOC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OT} = \alpha (\vec{i} + \vec{j})$, cu $\alpha \in \mathbb{R}^*$. (1) **1p**

$\overrightarrow{TE} = -k\overrightarrow{TF}$, deci $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{1+k} (\overrightarrow{OE} + k\overrightarrow{OF}) = \frac{OE}{1+k} \vec{i} + \frac{OF \cdot k}{1+k} \vec{j}$. Folosind (1) deducem $\frac{OE}{1+k} = \frac{OF \cdot k}{1+k} \Leftrightarrow OE = OF \cdot k \Leftrightarrow OC - \frac{AC}{2} = k (OB - \frac{BD}{2}) \Leftrightarrow k = \frac{2 \cdot OC - AC}{2 \cdot OB - BD}$ **1p**

Problema 4. Fie numerele reale $a_1, a_2, \dots, a_{10} \in (0, 10)$, cu $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 10$. Demonstrați că există $b_1, b_2, \dots, b_{10} \in \mathbb{N}$, astfel încât $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 10$ și $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{10} - b_{10}| \leq 5$.
* * *

Soluție. Pentru orice $i = \overline{1, 10}$, notăm cu $f_i = \{a_i\}$ părțile fracționare ale numerelor a_i și le renumerotăm, astfel încât $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_{10}$. Fie $k = f_1 + f_2 + \dots + f_{10}$.

$k = a_1 - [a_1] + a_2 - [a_2] + \dots + a_{10} - [a_{10}] = 10 - ([a_1] + [a_2] + \dots + [a_{10}]) \in \mathbb{N} \dots$ **1p**

Alegem numerele:

$b_1 = [a_1], b_2 = [a_2], \dots, b_{10-k} = [a_{10-k}], b_{10-k+1} = [a_{10-k+1}] + 1, \dots, b_{10} = [a_{10}] + 1$. **1p**

Calculăm suma:

$S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{10} - b_{10}| = f_1 + \dots + f_{10-k} + (1 - f_{10-k+1}) + \dots + (1 - f_{10})$

și obținem: $S = 2 \cdot (f_1 + f_2 + \dots + f_{10-k}) \dots$ **1p**

$$\frac{f_1 + f_2 + \dots + f_{10-k}}{10 - k} \leq f_{10-k} \leq \frac{f_{10-k+1} + \dots + f_{10}}{k} = \frac{k - (f_1 + f_2 + \dots + f_{10-k})}{k}$$

Rezultă: $(f_1 + f_2 + \dots + f_{10-k})(\frac{1}{10-k} + \frac{1}{k}) \leq 1 \dots$ **3p**

$S = 2 \cdot (f_1 + f_2 + \dots + f_{10-k}) \leq \frac{2 \cdot k \cdot (10-k)}{10} \leq \frac{(k+10-k)^2}{4 \cdot 5} = 5 \dots$ **1p**