



Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2025

Ediția a 16-a,

Focșani, 15 februarie 2025

Enunțuri, soluții și bareme, clasa a 8-a

Problema 1. Fie intervalele deschise $I_1, I_2, I_3 \subset \mathbb{R}$, cu proprietatea că mulțimile $I_1 \setminus (I_2 \cup I_3)$, $I_2 \setminus (I_3 \cup I_1)$ și $I_3 \setminus (I_1 \cup I_2)$ conțin fiecare cel puțin câte un număr întreg.

a) Dați un exemplu de intervale I_1, I_2, I_3 cu proprietatea dată.

b) Arătați că există $x, y \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ pentru care $x - y > 2$.

Soluție.

a) Alegem, de exemplu, intervalele $(1, 3)$, $(3, 5)$ și $(5, 7)$ **2p**

b) Fie $a_k \in \mathbb{Z} \cap I_k$, pentru orice $k = 1, 2, 3$, numerele cu proprietatea dată. Din condiția dată deducem că acestea sunt distincte două câte două. **2p**

Presupunem fără a restrânge generalitatea că $a_1 < a_2 < a_3$. Cum $a_i \in \mathbb{Z}$, deducem că $a_3 \geq 2 + a_1$ **2p**

Întrucât I_1 este interval deschis și $a_1 \in I_1$, putem alege $y \in I_1, y < a_1$. Analog, putem alege $x \in I_3, x > a_3$. Atunci $x, y \in I_1 \cup I_2 \cup I_3$ iar $x - y > a_3 - a_1 \geq 2$ **1p**

Problema 2. Determinați $a, b \in \mathbb{N}$ pentru care $a^2 + b^2 + ab = 2025$.

Soluție.

Observăm că dacă $a = 0$, atunci $b = 45$, deci $(0, 45)$, $(45, 0)$ sunt soluții. **1p**

Căutăm mai departe soluții cu componentele nenule. Ecuația se scrie ca $4a^2 + 4b^2 + 4ab = 90^2$ sau $(2a + b)^2 = 90^2 - 3b^2$, adică $90^2 - 3b^2$ este pătrat perfect **2p**

În 90^2 , factorul 3 are exponentul 4 iar în $3b^2$ exponentul lui 3 este impar, atunci acesta trebuie să fie minim 5, altfel exponentul lui 3 în $(2a + b)^2$ ar fi impar. Atunci $9|b$ **2p**

Ecuația este simetrică în a și b , deci $9|a$. Atunci, dacă $a = 9x, b = 9y$, avem $x^2 + y^2 + xy = 25$. Din $x, y \neq 0$ avem $x < 5$, deci $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Verificând, nu găsim soluții. Așadar, singurele soluții sunt $(0, 45)$, $(45, 0)$ **2p**

Soluție alternativă. Ecuația poate fi privită ca ecuație de gradul II, de exemplu în a . Atunci $\Delta = b^2 - 4b^2 + 4 \cdot 2025 = 90^2 - 3b^2$ este pătrat perfect. **2p**

Problema 3. Pe planul triunghiului ascuțitunghic ABC se ridică, în ortocentrul acestuia, o perpendiculară pe care se consideră punctul S astfel încât $\angle ASB = 90^\circ$.

a) Arătați că punctul S există și că este unic.

b) Arătați că $\angle BSC = \angle CSA = 90^\circ$.

c) Dacă $A' \in (SA)$, $B' \in (SB)$ și $C' \in (SC)$ sunt alese astfel încât $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$,

arătați că $(A'B'C') \parallel (ABC)$.

Soluție.

a) Triunghiul ABC este ascuțitunghic, deci ortocentrul său H este în interiorul acestuia. Fie (HO) perpendiculara din ipoteză. Avem $\angle AHB + \angle BHC + \angle CHA = 360^\circ$, deci cel puțin unul dintre aceste unghiuri, să zicem $\angle AHB$, are măsura cel puțin 120° . În acest caz $\triangle AHB$ este obtuzunghic, deci $AH^2 + BH^2 < AB^2$ (1) **1p**

Un punct $S \in (HO)$ are proprietatea că $\angle ASB = 90^\circ$ dacă și numai dacă $SA^2 + SB^2 = AB^2$ (2). Dar $SH \perp (ABC)$, deci $SH \perp HA$ și $SH \perp HB$. Atunci $SA^2 = SH^2 + HA^2$ și $SB^2 = SH^2 + HB^2$. Atunci (2) este echivalentă cu $2 \cdot SH^2 + HA^2 + HB^2 = AB^2$. Din (1) rezultă că există distanța SH pentru care $SH^2 = \frac{AB^2 - HA^2 - HB^2}{2}$. Evident, există un unic punct $S \in (HO)$ care verifică **1p**

b) Avem $SH \perp (ABC)$ și $BH \perp AC$, deci dacă $BH \cap AC = \{B'\}$, atunci $SB' \perp AC$. Deducem că $AC \perp (SHB)$. Cum $SB \subset (SHB)$, avem $AC \perp SB$. Dar $SB \perp SA$, deci $SB \perp (SAC)$. Atunci $SB \perp SC$ și, analog, $SA \perp SC$ **3p**

c) Fie t raportul de asemănare dintre cele două triunghiuri. Atunci $A'B' = t \cdot AB$, $B'C' = t \cdot BC$ și $C'A' = t \cdot CA$, iar $AB^2 = SA^2 + SB^2$, $A'B'^2 = SA'^2 + SB'^2$ și analogele. Atunci $SA'^2 = \frac{(SA^2 + SB^2) + (SA'^2 + SC'^2) - (SB'^2 + SC'^2)}{2} = \frac{A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2}{2} = t^2 \cdot \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = t^2 \cdot SA^2$, deci $SA' = t \cdot SA$. Analog $SB' = t \cdot SB$ și $SC' = t \cdot SC$, deci $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC}$ și atunci $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, deci $(A'B'C') \parallel (ABC)$.. **2p**

Problema 4. Într-un tablou cu 17 linii și 7 coloane completăm în fiecare celulă 0 sau 1 astfel încât să nu avem două linii completate identic.

- a) Arătați că există două linii în care numerele corespondente de pe cel puțin patru coloane coincid.
- b) Determinați suma maximă pe care o pot avea toate elementele de pe trei coloane.

Soluție.

a) Din cele 17 linii, conform principiului cutiei, cel puțin 9 vor fi completate la fel pe prima coloană. Dintre acestea, conform principiului cutiei, cel puțin 5 vor fi completate la fel pe a doua coloană. Dintre acestea, conform principiului cutiei, cel puțin 3 vor fi completate la fel pe a treia coloană. Dintre acestea, conform principiului cutiei, cel puțin 2 vor fi completate la fel pe a patra coloană. Acestea două din urmă vor avea primele patru coloane completate identic. **3p**

b) În total în 3 coloane avem $3 \cdot 17 = 51$ de celule. Dacă toate acestea ar fi completate cu 1, excluzând aceste celule, rămâne un tablou cu 17 linii și 4 coloane. Fiecare linie poate fi completată în $2^4 = 16$ moduri, deci există cu siguranță două linii la fel completate. Atunci în tabloul complet vor exista două linii identic completate, contradicție. **3p**

Atunci suma maximă este cel mult 50 și aceasta se poate atinge, de exemplu, când primele 3 coloane sunt completate doar cu 1, cu excepția coloanei a treia de pe ultimul rând. Pe primele 16 rânduri completăm coloanele 4 – 7 cu toate cele 16 combinații posibile de 0 și 1. Pe ultimul rând completăm coloanele 4 – 7 cu 0. **1p**