



## Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2025

Ediția a 16-a

Focșani, 15 februarie 2025

Enunțuri, soluții și bareme, clasa a 7-a

**Problema 1.** În triunghiul  $ABC$ , mediatoarea laturii  $BC$  și bisectoarea din  $A$  au intersecția un punct  $Q$ , situat pe linia mijlocie  $MN$ , unde  $M \in (AB)$  și  $N \in (AC)$ . Arătați că triunghiurile  $MQB$  și  $NQC$  au arii diferite.

**Soluție.**

Pentru că  $MN$  este linie mijlocie în  $\Delta ABC$ , avem  $MN \parallel BC$  ..... **1p**

Atunci,  $d(B, MN) = d(C, MN)$  ..... **1p**

Presupunem că  $[MQB] = [NQC]$ . Atunci  $\frac{1}{2} \cdot MQ \cdot d(B, MN) = \frac{1}{2} \cdot NQ \cdot d(C, MN)$ .

Deducem că  $MQ = QN$  ..... **2p**

În triunghiul  $AMN$ , segmentul  $AQ$  este atunci și mediană și bisectoare, deci  $AMN$  este un triunghi isoscel, cu  $AM = AN$  ..... **2p**

Folosind din nou faptul că  $MN$  este linie mijlocie, deducem că  $ABC$  este triunghi isoscel și atunci mediatoarea laturii  $BC$  și bisectoarea din  $A$  coincid, deci intersecția lor nu poate fi doar punctul  $Q$  ..... **1p**

**Problema 2.** O pereche  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  se numește *întreagă* dacă  $a, b > 0$  și numerele  $\sqrt{ab}$ ,  $\frac{a+b}{2}$  și  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$  sunt toate întregi și distincte. Notăm cu  $d(a, b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}$ .

a) Arătați că  $(5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6})$  este o pereche întreagă.

b) Arătați că pentru orice pereche întreagă  $(a, b)$  avem  $d(a, b) \geq 6$ .

**Soluție.**

a) Prin calcul direct ne rezultă că cele 3 numere sunt 1, 5 și 7 ..... **3p**

b) Fie  $x = \sqrt{ab}$ ,  $y = \frac{a+b}{2}$  și  $z = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ . Aceste numere sunt naturale nenule și verifică  $(2y)^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 2z^2 + 2x^2$  sau  $x^2 + z^2 = 2y^2$  (1) ..... **2p**

Din I.M. avem  $x < y < z$  și folosind faptul că  $x, y, z \in \mathbb{N}$ , avem  $z \geq x + 2$  iar din (1) deducem că  $x$  și  $z$  au aceeași paritate (2) ..... **1p**

Dacă  $z = x + 2$ , atunci avem  $y^2 = (x + 1)^2 + 1$ , dar nu există două pătrate consecutive nenule. Dacă  $z = x + 4$ , atunci avem  $y^2 = (x + 2)^2 + 4$ , dar nu există două pătrate nenule la diferență de 4. Atunci, din (2) avem  $z - x \geq 6$ , adică  $d(a, b) \geq 6$  ..... **1p**

**Observație.** Pentru  $z = x + 6$ , obținem  $y^2 = (x + 3)^2 + 9$ . Singurele pătrate nenule la distanță 9 sunt 16 și 25, deci  $x = 1$  și  $z = 7$ . Așadar, perechea de la a) este unica cu proprietatea că  $d(a, b) = 6$ .

**Problema 3.** Pe laturile triunghiului echilateral  $ABC$  se construiesc, în exteriorul acestuia, triunghiurile  $BCD$  și  $ACE$ , în care  $\angle D = \angle E = 90^\circ$  și  $\angle CBD = \angle ACE$ . Arătați că  $AD = BE = DE$ .

**Soluție.**

Triunghiurile  $BCD$  și  $CAE$  sunt congruente (I.U.), deci  $AE = CD$  ..... **1p**  
 Atunci și triunghiurile  $BAE$  și  $ACD$  sunt congruente (L.U.L), deci  $BE = AD$  .. **1p**  
 Construim dreptunghiul  $BDCF$  ..... **1p**  
 Atunci avem  $CF = BD = EC$  ..... **1p**  
 și  $\angle ECF = \angle ECA + \angle ACF = \angle CBD + \angle ACF = \angle BCF + \angle ACF = 60^\circ$  .... **1p**  
 Deducem că triunghiul  $EFC$  este echilateral și atunci  $BE = ED$  ..... **2p**

**Problema 4.** Fie  $n \geq 3$  drepte în plan. Oricare două drepte dintre acestea se intersectează și notăm mulțimea tuturor acestor puncte de intersecție cu  $\mathcal{P}$ . Asociem fiecărui punct  $P \in \mathcal{P}$  numărul dreptelor dintre cele  $n$ , care trec prin  $P$ .

- a) Dacă nu există trei drepte concurente printre cele  $n$ , arătați că  $\mathcal{P}$  are  $\frac{n(n-1)}{2}$  puncte.
- b) Arătați că suma numerelor asociate punctelor din  $\mathcal{P}$  este cel mult  $n(n-1)$ .

**Soluție.**

- a) Fiecare dreaptă se taie cu celelalte  $n-1$ , deci numărul punctelor de intersecție este  $n(n-1)$ . Fiecare punct este însă numărat de două ori (o dată pentru fiecare dreaptă), deci  $|\mathcal{P}| = \frac{n(n-1)}{2}$  ..... **3p**
- b) Pentru orice dreaptă din cele date, suma totală a numerelor asociate crește cu o unitate de câte ori această dreaptă trece printr-un punct din  $\mathcal{P}$ , adică aceasta contribuie la suma numerelor asociate cu numărul punctelor din  $d \cap \mathcal{P}$  ..... **3p**  
 Dar  $|d \cap \mathcal{P}| \leq n-1$ , pentru orice dreaptă  $d$ , de unde concluzia ..... **1p**