Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2025

Ediția a 16-a

Focșani, 15 februarie 2025

Enunțuri, soluții și bareme, clasa a 6-a

Problema1. Determinați numărul de divizori ai numărului $N = 2025^{25}$ care sunt pătrate perfecte sau cuburi perfecte.

Soluție. Descompunem $N = \left(3^4 \cdot 5^2\right)^{25} = 3^{100} \cdot 5^{50}$

Pătratele perfecte, divizori ai numărului N , sunt de forma $3^{2k} \cdot 5^{2p}$

unde k și p sunt numere naturale $0 \le k \le 50$ și $0 \le p \le 25$ ………….……... 1p

Numărul N are $51 \cdot 26 = 1326$ divizori care sunt pătrate perfecte …..…1p

Cuburile perfecte, care divid numărul N , sunt de forma $3^{3a} \cdot 5^{3b}$

unde a și b sunt numere naturale $0 \le a \le 33$ și $0 \le b \le 16$ ……………….......1p

Numărul N are $34 \cdot 17 = 578$ divizori care sunt cuburi perfecte………….....1p

Divizorii numărului N care sunt pătrate perfecte și cuburi perfecte sunt

de forma $3^{6x} \cdot 3^{6y}$ unde x și y sunt numere naturale $0 \le x \le 16$ și $0 \le y \le 8$ ….1p

Numărul acestora fiind $17 \cdot 9 = 153$……………………………………………1p

Răspuns: N are $1326 + 578 - 153 = 1751$ divizori care sunt pătrate perfecte

sau cuburi perfecte……………………………………………………..1p

Problema2. Fie a și b două numere naturale nenule pentru care

$$14\cdot[a,b]+7\cdot a+2\cdot b=241\cdot(a,b).$$

Arătați că $9\cdot a+4\cdot b$ este un multiplu al lui 47.

Soluție: Fie $d=(a,b)$. Atunci $a=d\cdot x$ și $b=d\cdot y$, unde $(x,y)=1$. Avem $14dxy+7dx+2dy=241d$, deci $14xy+7x+2y=241$ ………………………….1p

Atunci $(7x+1)(2y+1)=242=2\cdot 11^2$ ……………………………………….2p

Numărul $2y+1$ este impar, dar nu poate fi 11^2 pentru că am avea $7x+1=2$.

Atunci $2y+1=11$ și $y=5$, deci $x=3$ …………………………………….3p

Vom avea deci $9a+4b=47d$ număr evident divizibil cu 47 ……………..1p

Problema 3. Fie n un număr natural nenul. Determinați valoarea sumei
$S=(n+1,2n+5)+(n+2,2n+7)+(n+2025,2n+4053)$

Soluție: Fie $d_1=(n+1,2n+5), d_2=(n+2,2n+7)$ și $d_3=(n+2025,n+4053)$

Atunci $d_1 / 2n+5-2(n+1)=3, d_2 / 2n+7-2(n+2)$ și $d_3 / 2n+4053-2(n+2025)$,

adică d_1, d_2 și d_3 divid pe 3 ……………………………………..…2p

Pentru $n=3k$ vom avea $d_1=d_2=1$ și $d_3=3$ ……………………………..2p

La fel în cazurile $n=3k+1, n=3k+2$ unul dintre aceste 3 numere va fi 3,

iar celelalte două 1 ………………………………………………2p

Atunci $S=3+1+1=5$ ..……………………………………………..1p

Problema 4. În interiorul unui unghi obtuz $\sphericalangle AOD$ considerăm semidreptele distincte $(OB$ și $(OC$ astfel încât $OA \perp OC$ și măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle COD$ este de 65°. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle BOD$.

Soluție:

I. **Dacă** $(OB \subset Int\sphericalangle AOC$

$$65^\circ = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \frac{1}{2}\sphericalangle COD$$ 1p

Deci $130^\circ = \sphericalangle AOB + 2\sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = (\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC) + (\sphericalangle BOC + \sphericalangle COD)$ 1p

Dar $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 90^\circ$ iar $\sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = \sphericalangle BOD$ prin urmare

$\sphericalangle BOD = 130^\circ - 90^\circ = 40^\circ$ 1p

II. **Dacă** $(OB \subset Int\sphericalangle COD$

$$65^\circ = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB - \sphericalangle COB + \frac{1}{2}\sphericalangle COD$$ 2p

$130^\circ = \sphericalangle AOB - 2\sphericalangle COB + \sphericalangle COD = (\sphericalangle AOB - \sphericalangle COB) + (\sphericalangle COD - \sphericalangle COB)$ ..1p

$\sphericalangle AOB - \sphericalangle COB = \sphericalangle AOC = 90^\circ$ iar $\sphericalangle COD - \sphericalangle COB = \sphericalangle BOD$

$130^\circ = 90^\circ + \sphericalangle BOD$ prin urmare $\sphericalangle BOD = 40^\circ$ 1p