## Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2025

## Ediţia a 16-a

## Focşani, 15 februarie 2025

## Enunţuri, soluţii şi bareme, clasa a 5-a

**Problema 1.** a) Calculaţi

$$n = 2025 + 2023 - 2021 - 2019 + 2017 + 2015 - 2013 - 2011 + \ldots + 1.$$

b) Scrieţi numărul $3^n$ ca sumă de trei pătrate perfecte, nu toate egale.

**Soluţie.**

a) Avem $n = (2025 + 2023 - 2021 - 2019) + (2017 + 2015 - 2013 - 2011) + \ldots + (5 + 4 - 3 - 2) + 1$ ........ **2p**
deci $n = 1 + 8 \cdot (1012 : 4) = 2025$ ........ **2p**

b) $3^{2025} = 27 \cdot 3^{2022} = (5 \cdot 3^{1011})^2 + (3^{1011})^2 + (3^{1011})^2$ ........ **3p**

**Problema 2.** Fie $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{2025}$.
a) Determinaţi ultima cifră a lui $S$.
b) Determinaţi ultimele două cifre ale lui $S$.
c) Determinaţi restul împărţirii lui $S$ la 13.

**Soluţie.**

a) Avem $S = 1+3+3^2(1+3+3^2+3^3)+3^6(1+3+3^2+3^3)+\ldots+3^{2022}(1+3+3^2+3^3)$,
deci $S = 4 + 360(1 + 3^4 + 3^8 + \ldots + 3^{2020})$ ........ **2p**
Deducem că $U(S) = 4$ ........ **1p**
b) $U(3^{4k}) = 1$, deci $U(1 + 3^4 + 3^8 + \ldots + 3^{2020}) = U(506) = 6$........ **1p**
Atunci $S = \overline{\ldots 64}$ ........ **1p**
c) $S = 1 + (3 + 3^2 + 3^3) + \ldots + (3^{2023} + 3^{2024} + 3^{2025}) = 1 + 39(1 + 3^3 + \ldots + 3^{2022})$,
deci restul căutat este 1 ........ **2p**

**Problema 3.** Numărul $n$ împărţit la 11 dă restul 8 şi împărţit la 13 dă restul 6. Aflaţi restul împărţirii lui $n$ la 143.

**Soluţie.**

Avem $n = 11a + 8$ şi $n = 13b + 6$ ........ **1p**
Atunci $13n = 143a + 104$ si $11n = 143b + 66$ ........ **2p**
Deducem că $2n = 143(a - b) + 38$ ........ **1p**

Atunci $a-b$ este par şi notăm $a-b=2t$. Obţinem $n=143t+19$, deci restul căutat este 19 ..................................................................... **3p**

**Problema 4.** La o conferinţă participă 2025 de persoane. Acestea sunt împărţite în $a$ grupe de câte 4 persoane (numite $A$-grupe) şi $b$ grupe a câte 7 persoane (numite $B$-grupe).
a) Determinaţi restul împărţirii lui $b$ la 4.
b) În câte moduri se poate face împărţirea în astfel de grupe ?
c) Care este diferenţa pozitivă minim posibilă pe care o putem avea între numărul persoanelor din $A$ grupe şi cel al persoanelor din $B$ grupe ? (Prin diferenţă pozitivă a două numere întelegem diferenţa dintre cel mai mare dintre ele şi cel mai mic dintre ele, iar dacă sunt egale, aceasta este 0)

**Soluţie.**

a) Avem $4a+7b=2025$ (1) ..................................................... **1p**
Atunci 4 divide $4a+8b=2025+b$, deci $b=4c+3$ ............................ **1p**
b) Scriem $4a+7(4c+3)=2025$, deci $a+7c=501$ ............................ **1p**
Atunci $c \in \{0,1,\ldots,71\}$ şi $a=501-7c$, deci avem 72 de soluţii ................ **1p**
c) Observăm că $4a \neq 7b$ (pentru că 2025 este impar). Fie $d$ diferenţa căutată. Atunci $d=4a-7b$ sau $d=7b-4a$. Observăm că $d$ are aceiaşi paritate cu $b$, iar din (1) ne rezultă că $b$ este impar, deci $d$ este impar (2) ................................ **1p**
Dacă $4a-7b=d$, avem $14b=2025-d$, deci $d=7(289-2b)+2$, iar dacă $7b-4a=d$, avem $d=7(2b-289)+2$. Atunci $d$ dă restul 2 la împărţirea cu 7 .............. **1p**
Conform (2), pentru $d=9$ ne rezultă $b=144$, care este par, deci nu convine. Pentru $d=23$ avem $b=143$ şi $a=256$, deci minimul căutat este 23 .................... **1p**