Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2025

Ediţia a 16-a

Focşani, 15 februarie 2025

Enunţuri, soluţii şi bareme - clasa a 11-a

Problema 1. Considerăm şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$\frac{\sqrt[n]{n!\cdot a_n}}{n} = \frac{1}{e}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

b) În trecut, aproximarea factorialilor a fost o pasiune pentru matematicianul Stirling, care a dedus că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\cdot e^{-n}} = \sqrt{2\pi}$. Folosind rezultatul lui, determinaţi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Soluţie.

a) Avem $a_n = \frac{n^n\cdot e^{-n}}{n!}$ **1p**
Atunci $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **1p**
De aici deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ **2p**

b) Avem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n\cdot e^{-n}\cdot\sqrt{2n\pi}}{n!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ **2p**
Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **1p**

Problema 2. Fie $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ o funcţie descrescătoare, astfel încât funcţia $g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ definită prin $g(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)}$, pentru orice $x>0$, este crescătoare.

a) Arătaţi că, dacă $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = 1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$.

b) Arătaţi că, dacă $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \infty$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$.

Soluţie.

a) Avem $g(x) = \frac{(x+1)f(x+1)}{xf(x)}\cdot\frac{x}{x+1}$. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \frac{1}{1}\cdot 1 = 1$ **2p**

b) Din f descrescătoare deducem că $g(x)\leq 1$, deci g este mărginită. Dar g este crescătoare şi atunci există $a = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, unde $a\leq 1$. Mai mult, $g(x)\leq a$, pentru orice $x>0$ **2p**
Presupunem că $a<1$. Atunci $\frac{f(x+n)}{f(x)} = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{f(x+k+1)}{f(x+k)} = \prod_{k=0}^{n-1} g(x+k)\leq a^n$ **2p**
Deducem că $(x+n)f(x+n)\leq(x+n)f(x)a^n$. Ducând la limită după $n\to\infty$, obţinem $\infty\leq 0$, absurd. Rămâne cazul $a=1$. **1p**

Problema 3. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ o matrice cu valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, toate nenule.

a) Arătaţi că A este inversabilă şi $\det(A + A^{-1}) = \left(\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(\lambda_2 + \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(\lambda_3 + \frac{1}{\lambda_3}\right)$.
b) Dacă $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = 0$, arătaţi că $\det(A + A^{-1}) = \det A + \det A^{-1}$.

Soluţie.

a) Matricea A nu are valori proprii nule, deci este inversabilă. Atunci, inversa sa A^{-1} are valorile proprii $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}$ **1p**
Scriem $A + A^{-1} = A^{-1}(A^2 + I_n)$. Matricea $A^2 + I_n$ are valorile proprii $\lambda_1^2 + 1, \lambda_2 + 1, \lambda_3^2 + 1$, deci are determinantul $(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2)(1 + \lambda_3^2)$ **1p**
Atunci $\det(A + A^{-1}) = \det(A^{-1}) \det(A^2 + I_n) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(1 + \lambda_1^2)(1 + \lambda_2^2)(1 + \lambda_3^2) = \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right)\left(1 + \frac{1}{\lambda_2}\right)\left(1 + \frac{1}{\lambda_3}\right)$ **1p**

b) Din $\mathrm{tr}(A) = 0$ deducem că $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ iar din $\mathrm{tr}(A^2) = 0$ deducem că $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$ **1p**
Atunci $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 0$ iar polinomul caracteristic al matricei A este $P_A(X) = X^3 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$. **1p**
Dar λ_i sunt rădăcinile lui P_A, deci $\lambda_1^2 = \lambda_2\lambda_3$ şi similarele **1p**
Atunci, din a) rezultă că $\det(A + A^{-1}) = \det A + \det A^{-1}$ **1p**

Problema 4. Fie $n \geq 3$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice cu proprietatea că adjuncta sa A^* are exact p elemente nenule, unde p este un număr prim cu $p \leq n$. Arătaţi că, pentru orice $m \geq 1$, numărul elementelor nenule ale matricei $(A^*)^m$ este 0 sau p.

Soluţie.

Dacă A^* este inversabilă, atunci $p = n$. Altfel, dacă $p \leq n - 1$, va exista o linie în A^* cu toate elementele nule, deci $\det A^* = 0$ **1p**
Atunci A^* are câte un element nenul pe fiecare linie şi pe fiecare coloană. Numim o astfel de matrice specială şi arătăm că produsul a două matrice speciale este specială, de unde, inductiv, rezultă că $(A^*)^m$ are exact p elemente nenule, $(\forall) m \geq 1$ **1p**
Într-adevăr, dacă A şi B sunt speciale, când calculăm linia i în matricea AB, vom înmulţi linia i din A cu coloanele din B. Din unicitatea elementului nenul al liniei i din A, aflat pe poziţia j, deducem că în AB vom avea un unic element nenul pe linia i şi anume cel format din produsul acelei coloane din B care are elementul nenul pe coloana j **1p**
În cazul în care A^* nu este inversabilă, avem $\det A = 0$. Din relaţia lui Sylvester deducem că $\mathrm{rang}(A^*) \leq 1$, deci $\mathrm{rang}(A^*) = 1$, pentru că $A^* \neq O_n$ **1p**
Elementele nenule ale lui A^* trebuie să fie toate pe o linie. Altfel, acestea determină o submatrice $a \times b$ cu $a, b \geq 2$. Cum ab nu este prim, putem alege un element nul din această matrice. Pe linia şi coloana acestuia va exista câte un element nenul. Minorul de ordin 2 determinat de aceste 3 elemente şi colţul rămas este nenul, ceea ce contrazice contrazice $\mathrm{rang}(A^*) = 1$ **2p**
Numim săracă o matrice care are elemente nenule doar pe o linie. O putere de matrice săracă înmulţită cu matricea însăşi dă o matrice săracă sau O_n. Într-adevăr, dacă A are elemente nenule doar pe linia i, dacă elementul de pe coloana i este nenul, atunci produsul are tot atâtea elemente nenule ca şi matricea, altfel este O_n **1p**