



## Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2025

Ediția a 16-a

Focșani, 15 februarie 2025

Enunțuri, soluții și bareme - clasa a X-a

**Problema 1.** Fie  $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + yi \text{ cu } x, y \in \mathbb{Z}\}$  mulțimea întregilor lui Gauss. În planul complex considerăm triunghiul  $ABC$ , având centrul de greutate  $G$  și medianele  $[AD]$ ,  $[BE]$ , respectiv  $[CF]$ , cu proprietatea că afixele punctelor  $A, B, C, D, E, F, G$  se găsesc toate în mulțimea  $\mathbb{Z}[i]$ .

a) Dați exemplul de șapte numere complexe cu modulele mai mici decât 8, care să fie afixele celor șapte puncte din enunț.

b) Arătați că părțile reale ale afixelor celor șapte puncte cu proprietatea din enunț nu pot fi numere întregi consecutive.

**Soluție.** Vom nota cu  $z_P$  afixul punctului  $P$ .

a) Trebuie să avem  $z_D = \frac{z_B + z_C}{2}$ ,  $z_E = \frac{z_C + z_A}{2}$ ,  $z_F = \frac{z_A + z_B}{2}$  și  $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ . Luăm  $A(-6 + 2i)$ ,  $B(2 + 4i)$ ,  $C(4 - 6i)$  și atunci  $D(3 - i)$ ,  $E(-1 - 2i)$ ,  $F(-2 + 3i)$ ,  $G(0)$ . Se verifică prin calcul că cele șapte module sunt mai mici decât 8. .... **3p**

b) Fie  $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{Z}$  părțile reale ale numerelor complexe  $z_A, z_B, z_C, z_D, z_E, z_F$  și  $z_G$ . Din  $z_B + z_C = 2z_D$ , avem  $b + c = 2d$ . Analog  $c + a = 2e$  și  $a + b = 2f$ . Din  $z_A + z_B + z_C = 3z_G$  deducem că  $a + b + c = 3g$ , deci  $a + b + c = d + e + f = 3g$ . Presupunem că există  $n \in \mathbb{Z}$  astfel încât numerele  $a, b, c, d, e, f, g$  sunt, într-o anumită ordine,  $n - 3, n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2, n + 3$ . Atunci  $7n = a + b + c + d + e + f + g = 7g$ , deci  $g = n$  iar  $a + b + c = d + e + f = 3n$ . Cum  $a = (a + b + c) - (b + c) = 3g - 2d$ , deducem că  $a$  are aceeași paritate cu  $g = n$ . .... **2p**

Analog,  $b$  și  $c$  au aceeași paritate cu  $n$ , deci  $a, b, c, g$  sunt numere de aceeași paritate cu  $n$ , diferite, și sunt dintre  $n - 3, n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2, n + 3$ . Această secvență conține însă doar trei numere de aceeași paritate cu  $n$ . .... **2p**

**Problema 2.** Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $\log_{2025} \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 2} = x^4 - 4x^3 - x + 4$ .

**Soluție.**

Impunând condițiile de existență, deducem că  $x \in (\frac{2}{3}, \infty)$ . .... **1p**

Considerând funcția  $f : (\frac{2}{3}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x + \log_{2025} x$ , ecuația din enunț devine  $f(3x - 2) = f(x^2 - 2x + 2)$ . .... **2p**

Funcția  $f$  este strict crescătoare (ca sumă de funcții strict crescătoare), prin urmare  $f$  este funcție injectivă. .... **2p**

Deducem că  $3x - 2 = x^2 - 2x + 2$ , de unde  $x \in \{1, 4\}$ . Observăm că ambele valori convin, deci ecuația inițială are două soluții:  $x = 1$  și  $x = 4$ . .... **2p**

**Problema 3.** a) Fie  $x$  și  $y$  două numere reale astfel încât

$$x = \sqrt[3]{\frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{y}{2} - \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}}.$$

Arătați că  $x^3 + x = y$ .

b) Determinați funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care au proprietatea că

$$f(x^3 + x) \leq x \leq (f(x))^3 + f(x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

**Soluție.**

a) Notăm  $a = \sqrt[3]{\frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}}$ ,  $b = \sqrt[3]{\frac{y}{2} - \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}}$  și avem  $x = a + b$ .

Deoarece  $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ , obținem succesiv:  $x^3 = \frac{y}{2} + \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{y}{2} - \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3} + 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right]} \cdot x = y + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x = y - x$ , deci  $x^3 + x = y$ . ..... **3p**

b) Fie  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^3 + x$ . Funcția  $g$  este strict crescătoare, ca suma de funcții strict crescătoare, deci este injectivă, iar din a) ne rezultă că aceasta este surjectivă. Așadar  $g$  este inversabilă, iar inversa sa este și ea strict crescătoare, (1). ..... **1p**  
 Dubla inegalitate din enunț se scrie  $f(g(x)) \leq x \leq g(f(x))$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Din  $x \leq g(f(x))$  și (1) deducem că  $g^{-1}(x) \leq f(x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Atunci  $x = g^{-1}(g(x)) \leq f(g(x)) \leq x$ , deci  $f(g(x)) = x$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Deducem că  $f \circ g = 1_{\mathbb{R}}$ , prin urmare  $f = g^{-1}$ . ..... **2p**

Folosind a) obținem  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{x}{2} - \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3}}$ . **1p**

**Problema 4.** Se consideră numerele reale  $a, b, c$ , distincte două câte două, cu proprietatea că  $a + b + c = 0$  și  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Arătați că pentru orice  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ , există  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \{a, b, c\}$  astfel încât

$$|a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \leq |b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3|^2.$$

**Soluție.**

Fie  $A = \{a, b, c\}$ . Observăm că pentru  $x_1, x_2, x_3 \in A$  și  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  fixate avem

$$\left| \sum_{k=1}^3 x_k z_k \right|^2 = \sum_{k=1}^3 x_k z_k \cdot \overline{\sum_{k=1}^3 x_k z_k} = \sum_{k=1}^3 x_k z_k \cdot \sum_{k=1}^3 \overline{x_k z_k} = \sum_{k=1}^3 x_k^2 |z_k|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j (z_i \overline{z_j} + \overline{z_i} z_j)$$

Atunci

$$\sum_{x_1, x_2, x_3 \in A} \left| \sum_{k=1}^3 x_k z_k \right|^2 = \sum_{x_1, x_2, x_3 \in A} \sum_{k=1}^3 x_k^2 |z_k|^2 + \sum_{x_1, x_2, x_3 \in A} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j (z_i \overline{z_j} + \overline{z_i} z_j)$$

(1).

Atunci  $s_1 = \sum_{x_1, x_2, x_3 \in A} \sum_{k=1}^3 x_k^2 |z_k|^2 = 3^2 \cdot \sum_{k=1}^3 a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^3 |z_k|^2$ , pentru că pentru fiecare  $k \in \{1, 2, 3\}$ , coeficientul lui  $|z_k|^2$  este  $a_i^2$  de atâtea ori câte alegeri ale celorlalte două numere avem din  $\{a, b, c\}$ . ..... **4p**

Mai departe, avem  $s_2 = \sum_{a_1, a_2, a_3 \in A} \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_i a_j (z_i \bar{z}_j + \bar{z}_i z_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (z_i \bar{z}_j + \bar{z}_i z_j) \cdot$

$$\sum_{a_1, a_2, a_3 \in A} a_i a_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (z_i \bar{z}_j + \bar{z}_i z_j) \cdot 3 \cdot \sum_{x, y \in \{a, b, c\}} xy = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (z_i \bar{z}_j + \bar{z}_i z_j) \cdot 3 \cdot \left( \sum_{k=1}^3 a_k \right)^2 = 0.$$

În relația (1), membrul stâng are  $3^3$  termeni, deci cel mai mic (mare) dintre aceștia este cel mult (puțin) egal cu  $\frac{s_1 + s_2}{3^3} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{a \in A} a^2 \cdot \sum_{k=1}^3 |z_k|^2$ , de unde rezultă concluzia. .... **3p**