



Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2026

Focșani, 31 Ianuarie 2026

Clasa a 9-a

Soluții și bareme

Problema 1. Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (AB), N \in (AC), O \in (MN)$ și $S \in (BC)$, astfel încât $\frac{OM}{ON} = \frac{SB}{SC} = k$. Dacă AD este bisectoarea unghiului $\angle A$, unde $D \in (BC)$, și vectorii \overrightarrow{AD} și \overrightarrow{OS} sunt coliniari, arătați că $\frac{MB}{NC} = k$.

Enache Pătrașcu

Soluție. Din relațiile $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BS}$ și $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CS}$ deducem că $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{k+1} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{k}{k+1} \cdot \overrightarrow{NC}$ **2p**

Atunci, dacă notăm $\alpha = \frac{MB}{AB}$ și $\beta = \frac{NC}{AC}$, obținem $\overrightarrow{OS} = \frac{\alpha}{k+1} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{\beta k}{k+1} \cdot \overrightarrow{AC}$ (1) **1p**

Similar, obținem că $\overrightarrow{AD} = \frac{AC}{AB+AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{AB}{AB+AC} \cdot \overrightarrow{AC}$ (2) **2p**

Întrucât vectorii \overrightarrow{AD} și \overrightarrow{OS} sunt coliniari iar vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} nu, avem din (1) și (2) că $\frac{\frac{\alpha}{k+1}}{\frac{AB}{AB+AC}} = \frac{\frac{\beta k}{k+1}}{\frac{AB}{AB+AC}}$, adică $\frac{\alpha}{AC} = \frac{\beta k}{AB}$, de unde deducem că $\frac{MB}{NC} = k$ **2p**

Problema 2. Spunem despre o mulțime de numere naturale A că este întreruptă dacă există numerele naturale $a < b < c$ astfel încât $a, c \in A$ și $b \notin A$. Determinați numărul de submulțimi întrerupte ale mulțimii $\{1, 2, \dots, n\}$, unde $n \geq 3$.

Cristi Săvescu

Soluție. Din ipoteză deducem că o mulțime întreruptă are cel puțin două elemente, deci mulțimea vidă nu este întreruptă **1p**

Observăm că pentru orice $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ cu $a \leq b$, dintre toate mulțimile pentru care $\min A = a$ și $\max A = b$, sigura care nu este întreruptă este cea care conține toate numerele de la a la b , adică $\{a, a + 1, \dots, b\}$ **2p**

Atunci numărul total de mulțimi care nu sunt întrerupte este egal cu numărul de perechi (a, b) cu $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ și $a \leq b$ **1p**

Dacă $a = 1$, avem n perechi, dacă $a = 2$, avem $n - 1$ perechi, etc. Atunci în total avem $n + (n - 1) + \dots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ astfel de perechi **2p**

Deducem că mulțimile întrerupte sunt în număr de $2^n - \frac{n(n+1)}{2} - 1$ **1p**

Problema 3. Pentru o mulțime finită de numere reale $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, notăm cu $s_k(A) = a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k$. Spunem că un număr natural n este restrictiv, dacă pentru orice mulțime A formată din n numere reale, pentru care $s_1(A) = 0$ și $s_3(A) = 0$, avem $s_{2k+1}(A) = 0$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

- a) Arătați că numerele 2, 3 și 4 sunt restrictive.
 b) Arătați că numărul 5 nu este restrictiv.

Mihai Piticari și Sorin Rădulescu

Soluție. a) Dacă $A = \{a, b\}$ și $a + b = a^3 + b^3 = 0$, atunci $b = -a$ și $a^{2k+1} + b^{2k+1} = a^{2k+1} - a^{2k+1} = 0$, deci 2 este restrictiv **1p**
 Dacă $A = \{a, b, c\}$ și $a + b + c = a^3 + b^3 + c^3 = 0$, atunci folosind $-c^3 = (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$, obținem $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, deci $abc = 0$, de unde $a = 0, b = 0$ sau $c = 0$. Atunci problema se reduce la cazul anterior, deci și 3 este restrictiv .. **2p**
 Dacă $A = \{a, b, c, d\}$ și $a + b + c + d = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$, atunci $a^3 + b^3 + c^3 = -d^3 = (-d)^3 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$, deci avem $a = -b$ sau $b = -c$ sau $c = -a$. Deducem că a, b, c, d se grupează în două perechi de numere opuse, de unde rezultă că și 4 este restrictiv **2p**
 b) Mulțimea $A = \{-8, -7, 1, 5, 9\}$ arată că 5 nu este restrictiv **2p**

Problema 4. Fie mulțimile $A, B \subseteq \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $A \cup B = \mathbb{N}^*$ și $A \cap B = \emptyset$. Determinați funcțiile $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \text{ pentru orice } (a, b) \in (A \times A) \cup (B \times B).$$

Vasile Pop

Soluție. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, numerele n și n se află în aceeași mulțime din partiție. Atunci $f(2n) = 2f(n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ **1p**
 Fie $a = f(1)$. Atunci avem $f(1) = a$ și $f(2) = 2a$. Arătăm prin metoda reducerii la absurd că $f(n) = na$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Altfel, presupunem că există n_0 pentru care $f(n_0) \neq n_0a$ și alegem n_0 minim cu această proprietate **1p**
 Avem atunci $n_0 \geq 3$. Dacă n_0 este par, atunci $n_0 = 2n_1$ și avem $f(2n_1) \neq 2n_1a$, deci $2f(n_1) \neq 2n_1a$ sau $f(n_1) \neq n_1a$, ceea ce contrazice minimalitatea alegerii lui n_0 , deci n_0 este impar, adică $n_0 = 2n_1 + 1$ **1p**
 Presupunem că $1 \in A$. Dacă $n_0 \in A$, atunci $f(n_0 + 1) = f(n_0) + a = f(2(n_1 + 1)) = 2f(n_1 + 1) = 2a(n_1 + 1)$, deci $f(n_0) = n_0a$, fals. Atunci $n_0 \in B$. Din $1 \in A$ deducem că $n_0 - 1 \in B$, altfel am avea $f(n_0) = f(1 + (n_0 - 1)) = a + (n_0 - 1)a = n_0a$. Dacă $n_0 + 1 \in B$, atunci $f(2n_0) = f((n_0 - 1) + (n_0 + 1)) = a(n_0 - 1) + f(n_0 + 1) = a(n_0 - 1) + f(2(n_1 + 1)) = (n_0 - 1) + 2f(n_1 + 1) = 2n_0a$. Dar $f(2n_0) = 2f(n_0)$, deci avem o contradicție. Atunci $n_0 + 1 \in A$ și $f(n_0 + 2) = f(1 + n_0 + 1) = (n_0 + 2)a$. Dacă $2 \in B$, am avea $f(n_0 + 2) = f(n_0) + 2a = (n_0 + 2)a$, contradicție, deci $2 \in A$ **2p**
 Presupunem că avem $1, 2, \dots, k \in A$, unde $k < n_0 - 1$. Atunci $f(n_0 + 1 + k) = f(n_0 + 1) + f(k) = (n_0 + 1 + k)a$, deci dacă $k + 1 \in B$, am avea $f(n_0 + k + 1) = f(n_0) + f(k + 1) = f(n_0) + a(k + 1)$, ceea ce ar implica $f(n_0) = n_0a$, fals. Atunci

$k+1 \in A$. Deducem prin inducție că $1, 2, \dots, n_0-1 \in A$. Dar $n_0-1 \in B$, contradicție. Așadar presupunerea făcută este falsă, deci $f(n) = an$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde $a = f(1)$. Evident toate aceste funcții verifică **2p**