Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2026

Focşani, 31 Ianuarie 2026

Clasa a 8-a

Soluţii şi bareme

Problema 1. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care $[a+b+c] = [a] + [b] + [c]$.
a) Arătaţi că există $x \in \{a, b, c\}$ pentru care $[3x] = 3[x]$.
b) Câte triplete de numere $a < b < c$ din mulţimea

$$M = \left\{ \frac{k}{p} \middle| k \in \{1,2,3\}, p \in \{1,2\} \right\}$$

satisfac condiţia din ipoteză ?

Soluţie. a) Avem $[a] + [b] + [c] = [a+b+c] = [[a] + \{a\} + [b] + \{b\} + [c] + \{c\}] = [a] + [b] + [c] + [\{a\} + \{b\} + \{c\}]$, de unde deducem că $[\{a\} + \{b\} + \{c\}] = 0$, adică $\{a\} + \{b\} + \{c\} < 1$ (1) **2p**
Atunci $\{x\} = \min\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\} < \frac{1}{3}$, de unde deducem că $[3x] = [3[x] + 3\{x\}] = 3[x] + [3\{x\}] = 3[x]$ **2p**

b) Observăm că $M = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3\right\}$ **1p**
Din (1) deducem că cel mult unul dintre a, b, c au partea fracţionară $\frac{1}{2}$ iar restul sunt întregi. Dacă toate trei sunt întregi, avem un singur triplet, iar dacă 2 sunt întregi, pe acestea le putem alege în 3 moduri iar pe cel cu partea fracţionară $\frac{1}{2}$ îl putem alege în 2 moduri. În total avem $1 + 3 \cdot 2 = 7$ triplete **2p**

Problema 2. Determinaţi numerele $a_2, a_3, \ldots, a_{10} \in \{1, 2\}$ pentru care

$$a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_{10}^{10} = 2026.$$

Cristi Săvescu

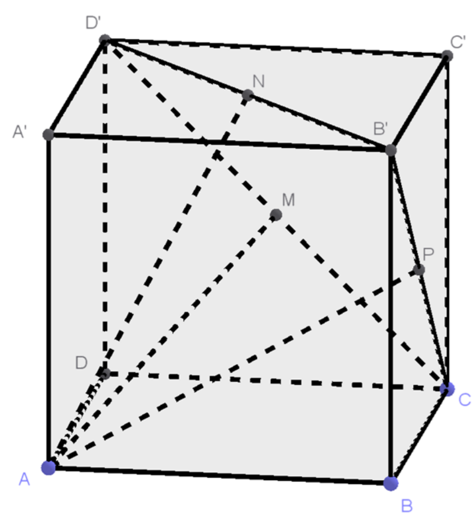
Soluţie. Observăm că $a_2 = a_3 = \ldots = a_{10} = 2$ nu verifică **1p**
Atunci există k pentru care $a_k = 1$. Fie k maxim cu această proprietate. Atunci $2026 = a_2^2 + a_3^3 + \ldots + a_{10}^{10} \leq 2^2 + \ldots + 2^{10} - 2^k + 1$, adică $2^k \leq 2^{11} - 1 - 2 - 2026 = 19$.
Atunci avem $k \leq 4$ **3p**
Deducem că $a_5 = a_6 = \ldots = a_{10} = 2$, deci $a_2^2 + a_3^3 + a_4^4 = 2026 - (2^{11} - 1 - 1 - 2 -$

$2^2 - 2^3 - 2^4) = 2026 - 2048 + 32 = 10$ **2p**
Atunci $a_4 < 2$, deci $a_4 = 1$, de unde $a_2^2 + a_3^3 = 9$. Această ecuaţie are soluţia unică $a_2 = 1$ şi $a_3 = 2$. Atunci $a_2 = a_4 = 1$ şi $a_3 = a_5 = a_6 = \ldots = a_{10} = 2$ **1p**

Problema 3. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Arătaţi că acesta este cub dacă şi numai dacă distanţele de la A la CD', CB' şi $B'D'$ sunt egale.

Adrian Bud

Soluţie. Notăm cu $AB = x$, $BC = y$, $AA' = z$ dimensiunile paralelipipedului.



Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub, cele trei distanţe sunt înălţimi în trei triunghiuri echilaterale congruente, deci sunt egale **2p**

Fie $A'N \perp B'D'$, $N \in (B'D')$. Din $AA' \perp A'D'$ şi $AA' \perp A'B'$, avem $AA' \perp (A'B'D')$, iar din "$T3\perp$" rezultă $AN \perp B'D'$, adică $d(A, B'D') = AN$ **2p**
Cu teorema lui Pitagora în $\Delta A'B'D'$ avem $B'D' = \sqrt{x^2 + y^2}$, iar $A'N = \dfrac{A'D' \cdot A'B'}{B'D'} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Cu teorema lui Pitagora în $\Delta AA'N$ avem

$$AN = \sqrt{AA'^2 + A'N^2 = z^2 + \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{x^2+y^2}}$$

.... **2p**

Analog, $d(A, CB') = \sqrt{\dfrac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{y^2+z^2}}$, iar $d(A, CD') = \sqrt{\dfrac{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2}{x^2+z^2}}$, deci dacă $d(A, B'D') = d(A, CB') = d(A, CD')$ rezultă $x^2 + y^2 = y^2 + z^2 = x^2 + z^2$, echivalent cu $x = y = z$, ceea ce arată că $ABCDA'B'C'D'$ este cub **1p**

Problema 4. Un cub de latură n este împărţit prin plane paralele la feţe în n^3 cuburi congruente de latură 1.
a) Determinaţi numărul cuburilor de diferite dimensiuni care apar în figura obţinută.
b) În fiecare cub unitar, ducem toate diagonalele feţelor. Determinaţi numărul total de piramide triunghiulare regulate, cu cele trei unghiuri de la vârf drepte, care apar în figura obţinută.

Sorin Ulmeanu

Soluţie. a) Notăm cu $ABCDA'B'C'D'$ cubul mare. Pentru fiecare $p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ numim p-cub un cub din figură, cu latura de dimensiune p. Atunci observăm că colţul cel mai departat de A al unui p-cub parcurge $n + 1 - p$ cubul cu un colţ în C' .. **2p**
Numărul acestora este $(n + 1 - k)^3$, deci totalul cerut este $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ **1p**

b) Orice piramidă cu proprietatea dată are vârful în unul dintre vârfurile cuburilor mici şi muchiile laterale paralele la muchiile cubului mare, pentru că cele cu muchiile laterale egale au acestea dispuse fie la $90°$ (cele cu muchiile laterale paralele la muchiile cubului mare) fie la $60°$ (cele cu muchiile laterale paralele diagonalele cubului mare) **2p**
Atunci acestea sunt colţuri (cum este $ABDA'$ pentru cubul mare) în cuburi determinate la a). Cum fiecare astfel de colţ este determinat în mod unic de vârful cubului din care pleacă, pentru fiecare cub determinat la a) avem 8 astfel de piramide. Atunci numărul cerut este $8(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = 2n^2(n + 1)^2$ **2p**