Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2026

Focşani, 31 Ianuarie 2026

Clasa a 7-a

Soluţii şi bareme

Problema 1. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ notăm cu $\{x\}$ şi $[x]$ partea fracţionară, respectiv partea întreagă a lui x.
a) Dacă numerele $x, y \in \mathbb{R}$ satisfac relaţia $[x] + \{y\} = [y] + \{x\}$, arătaţi că $x = y$.
b) Daţi exemplu de numere distincte $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $[x] + 2\{y\} = [y] + 2\{x\}$.

Soluţie. Relaţia dată se scrie $[x] - [y] = \{x\} - \{y\} = s$ **1p**
Dar $\{x\} - \{y\} \in (-1, 1)$, deci $s \in (-1, 1)$ **1p**
iar $[x] - [y] \in \mathbb{Z}$, deci $s \in \mathbb{Z}$ **1p**
Deducem că $s = 0$, deci $[x] = [y]$ şi $\{x\} = \{y\}$, adică $x = y$ **1p**

b) De exemplu $x = \frac{5}{2}$ şi $y = 1$ **2p**
Avem $[x] + 2\{y\} = 2 + 0 = 2$ şi $[y] + 2\{x\} = 1 + 1 = 2$ **1p**

Problema 2. Fie $ABCD$ un pătrat, E simetricul lui A faţă de B şi $F \in (CE)$. Construim pătratul $BFGH$ astfel încât H să fie în interiorul pătratului $ABCD$.
a) Arătaţi că $H \in AC$.
b) Determinaţi $m(\angle CFH)$ astfel încât punctele D, H şi F să fie coliniare.
c) Arătaţi că $G \in CD$.

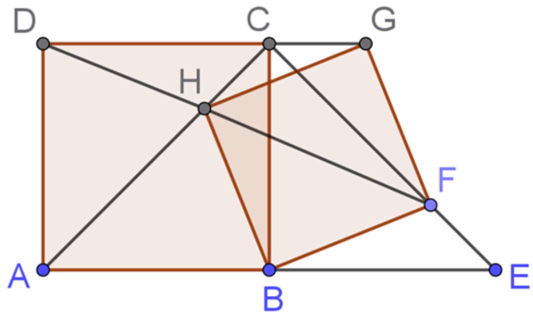
Adrian Bud

Soluţie.

a) $\sphericalangle CBH = \sphericalangle FBH - \sphericalangle FBC = 90^\circ - \sphericalangle FBC = \sphericalangle EBC - \sphericalangle FBC = \sphericalangle EBF$.

$$\begin{matrix}\Delta CBH \\ \triangle EBF\end{matrix} \left\{ \begin{matrix} [CB] \equiv [EB] \\ \sphericalangle CBH \equiv \sphericalangle EBF \\ [BH] \equiv [BF] \end{matrix} \right\} \overset{L.U.L.}{\Longrightarrow} \Delta CBH \equiv \Delta EBF \text{ de unde rezultă } \sphericalangle BCH =$$

$\sphericalangle BEF = 45^\circ$. Deoarece $\sphericalangle BCH = 45^\circ = \sphericalangle BCA$ rezultă $H \in (AC)$, adică H este pe AC **2p**



b) $\begin{matrix} \Delta DAH \\ \Delta BAH \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} [DA] \equiv [BA] \\ \sphericalangle DAH \equiv \sphericalangle BAH \\ [AH] \equiv [AH] \end{matrix} \right\} \overset{L.U.L.}{\Longrightarrow} \Delta DAH \equiv \Delta BAH$, deci $\sphericalangle DHA = \sphericalangle BHA$.

Dacă punctele D, H şi F sunt coliniare rezultă $\sphericalangle DHA + \sphericalangle AHB + \sphericalangle BHF = 180°$, adică $\sphericalangle AHD = \dfrac{135°}{2}$, iar din triunghiul ADH rezultă $\sphericalangle ADH = \dfrac{135°}{2}$.

Dar $\sphericalangle CDH = \sphericalangle CDA - \sphericalangle HDA = \dfrac{45°}{2}$, iar din triunghiul CDF cu $\sphericalangle CDF = 135°$, rezultă $\sphericalangle CFD = \dfrac{45°}{2}$ **3p**

c) Din $\Delta CBH \equiv \Delta EBF$ rezultă că $[CH] \equiv [EF]$. Atunci, dacă considerăm $FF' \perp BE, F' \in [BE]$ şi $HH' \perp CD, H' \in [CD]$, avem $\Delta CHH' \equiv \Delta EFF'$, pentru că sunt triunghiuri dreptunghice isoscele cu ipotenuzele de aceeaşi lungime. Atunci $[HH'] \equiv [FF']$. Dar $[GH] \equiv [BF]$ iar $\sphericalangle GHH' = \sphericalangle BFF'$, pentru că aceste unghiuri au laturile două câte două paralele. Deducem că $\Delta GHH' \equiv \Delta BFF'$, deci $\sphericalangle HH'G = 90°$, de unde rezultă concluzia **2p**

Problema 3. Fie a şi b două numere naturale compuse, care au acelaşi număr de divizori naturali, cel puţin patru. Ştiind că divizorii proprii ai lui a sunt direct proporţionali cu divizorii proprii ai lui b, arătaţi că $a = b$.

Cristi Săvescu

Soluţie. Fie $1 = d_0 < d_1 < \ldots < d_k < d_{k+1} = a$ divizorii lui a şi $1 = d'_0 < d'_1 < \ldots < d'_k < d'_{k+1} = b$ divizorii lui b. Atunci avem $\frac{d_1}{d'_1} = \frac{d_2}{d'_2} = \ldots = \frac{d_k}{d_{k'}}$ (1) **1p**

Fie $p = d_1$ şi $q = d'_1$. Atunci p şi q sunt prime **2p**

Dacă $p = q$, din (1) deducem că $d_k = d'_k$, deci $a = d_1 d_k = d'_1 d'_k = b$ **1p**

Altfel avem $p \neq q$. Din (1) deducem că $\frac{p}{q} = \frac{d_i}{d'_i}$, adică $d_i q = d_{i'} p$, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, k$. Atunci p divide toţi divizorii lui a şi q divide toţi divizorii lui b .. **1p**

Deducem că $a = p^s$ şi $b = q^{s'}$ şi atunci $d_2 = p^2$ şi $d'_2 = q^2$. Din (1) reiese că $\frac{p}{q} = \frac{p^2}{q^2}$, deci $p = q$, contradicţie **2p**

Problema 4. Fie $ABCD$ un trapez în care $AB \parallel CD$ şi $AC = AD$. Dacă notăm cu O intersecţia diagonalelor lui $ABCD$ şi cu M mijlocul lui BC, arătaţi că

$$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DAM.$$

Soluţie. Prelungim AM până întâlneşte CD în E **2p**
Atunci $ABEC$ este paralelogram, deci $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle EAC$ **1p**
şi $BE = AC = AD$, deci $ABED$ este trapez isoscel, deci $\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle ADB$ **2p**
Concluzia rezultă urmărind suma unghiurlor triunghiurilor ADX şi AOX, unde X este intersecţia diagonalelor lui $ABED$ **2p**