Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2026

Focşani, 31 Ianuarie 2026

Clasa a 5-a

Soluţii şi bareme

Problema 1. Andrei are de patru ori mai multe bile decât Bogdan. Andrei îi dă lui Bogdan un număr de bile și constată că acum are de trei ori mai multe bile decât Bogdan. Celor doi băieți li se alătură Cristi, care are un săculeț gol în care adună toate bilele celor doi, obținând un număr de bile mai mic decât 100. Cei trei reușesc apoi să împartă între ei, în mod egal, toate bilele din săculeț. Câte bile va avea, în final, fiecare dintre cei trei băieți?

Soluţie. Notăm cu a și b numărul bilelor lui Andrei, respectiv Bogdan și cu x numărul bilelor pe care Andrei le dă lui Bogdan. Avem că $a = 4b$ și $a - x = 3(b + x)$, de unde $b = 4x$, iar $a = 16x$. **3p**
În săculeț vor fi $20x$ bile, unde x este un număr natural mai mic decât 5. Acest număr de bile se poate împărți în mod egal între trei copii numai dacă $x = 3$. **3p**
În final, fiecare dintre cei trei băieți va avea câte 20 de bile. **1p**

Problema 2. Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n, există numerele naturale nenule a, b și c astfel încât

$$14^n = a^2 + b^2 + c^2.$$

$n = 1$ verifică: $14^1 = 1^2 + 2^2 + 3^2$. **2p**
$n = 2$ verifică: $14^2 = 4^2 + 6^2 + 12^2$. **2p**
Orice număr natural impar $n = 2k + 1$ verifică: $14^{2k+1} = 14^{2k}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \left(14^k\right)^2 + \left(14^k \cdot 2\right)^2 + \left(14^k \cdot 3\right)^2$. Orice număr natural nenul par $n = 2k + 2$ verifică: $14^{2k+2} = 14^{2k}(4^2 + 6^2 + 12^2) = \left(14^k \cdot 4\right)^2 + \left(14^k \cdot 6\right)^2 + \left(14^k \cdot 12\right)^2$. **3p**

Problema 3. Considerăm numărul cu 100 de cifre $A = \overline{99\ldots99}$ și fie B un număr natural nenul cel mult egal cu A.
a) Dacă $B = 2026$, determinaţi suma cifrelor numărului $A \cdot B$.
b) Arătați că suma cifrelor numărului $A \cdot B$ este un pătrat perfect.

Soluţie. Observăm că $A = 10^{100} - 1$ **1p**

a) $A \cdot B = \overline{202599\ldots97974}$, unde avem 96 de 9 între 5 şi 7. Atunci $s(A \cdot B) = 900$ **2p**

b) Dacă $B = \overline{b_1b_2\ldots b_n}$, unde $n \leq 100$, atunci $A \cdot B = 10^{100} \cdot B - B = \overline{b_1b_2\ldots b_n00\ldots0} - \overline{b_1b_2\ldots b_n}$. Fie b_m, $m \leq n$, ultima cifră nenulă a lui B; rezultă că

$$A \cdot B = \overline{b_1b_2\ldots b_{m-1}\,(b_m-1)\,99\ldots9\,(9-b_1)\ldots(9-b_{m-1})\,(10-b_m)\,00\ldots0},$$

numărul cifrelor de 9 fiind $100-m$, iar numărul zerourilor din final fiind $n-m$. **2p**
Suma cifrelor lui $A \cdot B$ este $(b_1+9-b_1)+(b_2+9-b_2)+\ldots+(b_{m-1}+9-b_{m-1})+(b_m-1+10-b_m)+9\cdot(100-m) = 900 = 30^2$, deci este un pătrat perfect. **2p**

Problema 4. O tablă de șah are forma unui pătrat 8×8, împărțit în pătrățele 1×1. Diana are 64 de jetoane pe care doreşte să le aşeze pe tablă, fiecare jeton pe câte un pătrăţel. Pe fiecare jeton este scris câte un număr: pe 57 dintre ele este scris 1 şi pe restul sunt scrise numerele $3^{2^4}, 3^{2^5}, \ldots$, respectiv $3^{2^{10}}$.
a) În câte moduri poate așeza Diana jetoanele pe tablă astfel încât exact un rând şi exact o coloană să aibă produsul numerelor de pe jetoane egal cu 1 ?
b) În câte moduri poate așeza Diana jetoanele pe tablă astfel încât produsul numerelor scrise pe jetoanele de pe orice linie sau coloană să fie mai mic decât 3^{2026} ?

Soluţie. a) Numim *speciale* jetoanele cu numere mai mari ca 1. Jetoanele speciale trebuie așezate pe linii diferite și pe coloane diferite **1p**
Atunci există un rând şi o coloană fără niciun jeton special. Numărul de alegeri pentru o astfel de pereche (rând, coloană), care este unic identificată de pătrăţelul de la intersecţia lor, este numărul de pătrăţele al tabloului, deci 64 .... **1p**
Eliminăm rândul şi coloana cu produsul 1 şi trebuie să alegem într-un subtablou 7×7 cele 7 pătrăţele în care punem jetoanele speciale, câte unul pe fiecare rând / coloană. Avem 7 alegeri pe primul rând, 6 pe al doilea, ..., deci aceste pătrățele pot fi alese în $7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1 = 7!$ moduri **1p**
Pentru fiecare astfel de alegere de pătrăţele, putem pune jetonul cu 3^{2^4} în 7 moduri, pe cel cu 3^{2^5} în 6 moduri etc. Numărul total de așezări în condițiile problemei este $64 \cdot (7!)^2$ **1p**

b) Observăm că $3^{2^4} \cdot 3^{2^5} \cdot \ldots \cdot 3^{2^{10}} = 3^{2^4+2^5+\ldots+2^{10}} = 3^{2032} > 3^{2026}$. Atunci nu putem avea toate jetoanele pe aceeaşi linie sau coloană **1p**
Reciproc, dacă jetoanele nu sunt toate pe aceeaşi linie sau coloană, produsul numerelor de pe oricare linie / coloană este cel mult $3^{2^5} \cdot \ldots \cdot 3^{2^{10}} = 3^{2016} < 3^{2026}$, deci orice astfel de configuraţie verifică condiţia de la b) **1p**
În general, numărul total de moduri în care putem plasa jetoanele speciale este $64 \cdot 63 \cdot \ldots \cdot 59$. Dintre aceste configuraţii, nu verifică cele în care toate jetoanele speciale sunt pe acelaşi rând (care sunt $8 \cdot (8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2) = 8 \cdot 8!$) şi cele în care toate jetoanele speciale sunt pe aceeaşi coloană (tot $8 \cdot 8!$). Atunci numărul căutat este $64 \cdot 63 \cdot \ldots \cdot 59 - 16 \cdot 8!$ **1p**