Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2026

Focşani, 31 Ianuarie 2026

Clasa a 11-a

Soluţii şi bareme

Problema 1. Fie şirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}, (y_n)_{n\geq 1}, (z_n)_{n\geq 1}$ pentru care

$$y_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \text{ şi } z_n = \frac{x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n}{n}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Dacă $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent, rezultă că $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent ?
b) Dacă $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent, rezultă că $(y_n)_{n\geq 1}$ este convergent ?

Soluţie. a) Observăm că $z_n = \frac{(n+1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)-y_1-y_2-\ldots-y_n}{n} = \frac{ny_n-y_1-y_2-\ldots-y_{n-1}}{n} = y_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} y_k$ **2p**

Dacă $(y_n)_{n\geq 1} \to L$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} y_k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = L$ şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L - L = 0$ **2p**

b) Nu. Considerăm $x_n = \frac{1}{n}$ şi atunci $z_n = 1$, pentru orice $n \geq 1$, deci $(z_n)_{n\geq 1}$ este convergent. Dar $y_n = H_n$, care nu este convergent **3p**

Problema 2. Considerăm funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ pentru care există limitele $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, iar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ şi } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(2x)} = \infty.$$

a) Daţi exemplu de astfel de funcţii.
b) Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Soluţie. a) Considerăm funcţiile $f(x) = 2^{-\frac{3}{2}x}$ şi $g(x) = 2^{-x}$, pentru orice $x > 0$. Atunci $\frac{f(x)}{g(x)} = 2^{(-\frac{3}{2}+1)x} = 2^{-\frac{1}{2}x} \to 0$ şi $\frac{f(x)}{g(2x)} = 2^{(-\frac{3}{2}+2)x} = 2^{\frac{1}{2}x} \to \infty$ **2p**

b) Din $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, deducem că există N_1 pentru care $f(x) < g(x)$, pentru orice $x > N_1$, iar din $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(2x)} = \infty$, deucem că există N_2 pentru care $f(x) > g(2x)$, pentru orice $x > N_2$. Atunci $g(x) > f(x) > g(2x)$, pentru orice $x > N = \max\{N_1, N_2\}$. **3p**

Aşadar $g(x) > f(x) > g(2x) > f(2x) > \ldots > g(2^n x) > f(2^n x) > g(2^{n+1}x) > \ldots > 0$. Şirurile $(f(2^n x))_{n\geq 1}$, $(g(2^n x))_{n\geq 1}$ sunt descrescătoare şi mărginite, deci convergente. Atunci $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L_f$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = L_g$ sunt finite, iar din multipla inegalitate de mai sus avem $L_g \leq L_f$ şi $L_f \leq L_g$, deci $L_f = L_g$. Dacă acestea nu sunt nule, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, contradicţie **2p**

Problema 3. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi numerele naturale nenule p şi q cu proprietatea că există matricele nenule $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ astfel încât

$$p \cdot A^k + q \cdot B^k = I_n, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}^*.$$

Cristi Săvescu

Soluţie. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $q \geq p \geq 1$. Atunci avem $p \cdot A + q \cdot B = I_n$, deci $A = \frac{1}{p} \cdot (I_n - q \cdot B)$ şi $\frac{1}{p} \cdot (I_n - q \cdot B)^2 + q \cdot B^2 = I_n$ sau $q^2 \cdot B^2 - 2q \cdot B + pq \cdot B^2 = (p-1) \cdot I_n$. Dacă $p \geq 2$, deducem că $q|p-1$, ceea ce contrazice $q \geq p$ **2p**

Atunci $p = 1$, deci $(q+1) \cdot B^2 = 2 \cdot B$ sau $B^2 = \frac{2}{q+1} \cdot B$, care implică inductiv $B^{k+1} = \left(\frac{2}{q+1}\right)^k \cdot B$, pentru orice $k \geq 1$. Fie b un element nenul al matricei B. Dacă $q \geq 2$, atunci pentru k suficient de mare, avem $0 < |\left(\frac{2}{q+1}\right)^k \cdot b| < 1$, deci elementul corespondent în matricea B^{k+1} nu este întreg, ceea ce contrazice $B^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, pentru orice $t \geq 1$. Atunci, avem $q = 1$ **3p**

Dacă $p = q = 1$, observăm că putem alege $A = I_1$ şi $B = I_n - I_1$, unde I_1 este matricea care are 1 în colţul din stânga sus şi restul elementelor nule. Concluzia este că singura pereche care verifică este $(1, 1)$ **2p**

Problema 4. a) Arătaţi că pentru orice matrice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ are loc relaţia

$$XY + YX = tr(X) \cdot Y + tr(Y) \cdot X + (tr(XY) - tr(X) \cdot tr(Y))I_2.$$

b) Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care $AB = -BA, BC = -CB$ şi $CA = -AC$. Arătaţi că $tr(A) = tr(B) = tr(C) = 0$.

Mihai Opincariu

Soluţie. a) Din relaţia lui Hamilton-Cayley pentru matricea $X + Y$ avem relaţia $(X+Y)^2 - tr(X+Y)(X+Y) + det(X+Y)I_2 = O_2$ **2p**
Atunci $X^2 + Y^2 + XY + YX + det(X+Y)I_2 = tr(X)X + tr(X)Y + tr(Y)X + tr(Y)Y$.

Dar $X^2 - tr(X)X + det(X)I_2 = 0$ şi similar pentru Y, deci $XY + YX + det(X+Y)I_2 = tr(X)Y + tr(Y)X + (detX + detY)I_2$ **2p**
Atunci avem de arătat că $tr(XY) - tr(X)tr(Y) + det(X+Y) = detX + detY$, relaţie pe care o obţinem din calcul direct **1p**

b) Dacă A este inversabilă, atunci $B = -A^{-1}BA$, deci $tr(B) = -tr(A^{-1}BA) = -tr(BAA^{-1}) = -tr(B)$, deci $tr(B) = 0$ şi analog $tr(C) = 0$. Aplicăm a) pentru A şi B şi avem $O_2 = tr(A) \cdot B + tr(AB) \cdot I_2$. Aplicând urma pe această relaţie, obţinem $tr(AB) = 0$. Atunci, cum $B \neq O_2$, avem $tr(A) = 0$. Presupunem mai departe că A, B, C sun neinversabile. Dacă $tr(A) = 0$, atunci din relaţia de la a) obţinem că $tr(B) = 0$ şi analog $tr(C) = 0$. Presupunem prin reducere la absurd că $tr(A) \neq 0$. Din relaţia de la a) obţinem că $tr(B) \neq 0$. Din $tr(A) \cdot B + tr(B) \cdot A = tr(A)tr(B) \cdot I_2$ deducem că $AB = BA$, deci $AB = BA = O_2$ (analog $AC = CA = BC = CB = O_2$). Atunci $B = x \cdot A + y \cdot I_2$, deci $B^2 = yB$, de unde deducem că $y = tr(B)$, deci $B = x \cdot A + tr(B)I_2$. Analog $B = x' \cdot C + tr(B)I_2$, deci $x \cdot A = x' \cdot C$. Deducem că există $\lambda \in \mathbb{R}^*$ pentru care $C = \lambda A$. Atunci $O_2 = AC = \lambda \cdot A^2$, deci $A^2 = O_2$. Aplicând urma pe relaţia lui Hamilton-Cayley pentru matricea A, obţinem $tr(A) = 0$, absurd **2p**