



Concursul interjudețean de matematică UNIREA 2026

Focșani, 31 Ianuarie 2026

Clasa a 10-a

Soluții și bareme

Problema 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ pentru care $z^3 = 1$. Arătați că

$$|z^n + 1| + |z^{n+1} + 2| \geq 2, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Gazeta Matematică

Soluție. Dacă $z = 1$, atunci $|z^n + 1| + |z^{n+1} + 2| = 5 \geq 2$ **1p**
Altfel z este rădăcina primitivă de ordin 3 a unității sau conjugata sa, deci are loc relația $z^2 + z + 1 = 0$ **2p**
Atunci $|z^n + 1| + |z^{n+1} + 2| \geq |z^n + z^{n+1} + 3|$ **1p**
Dar $z^{n+1} + z^n = z^n(1 + z) = -z^{n+2}$ **1p**
Deci $|z^n + z^{n+1} + 3| = |3 - z^{n+2}| \geq 3 - |z^{n+2}| = 2$ **2p**

Problema 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție neconstantă pentru care

$$f((f(x))^2 y) = x^3 f(xy), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Dați exemplu de o funcție cu proprietatea dată.
- b) Arătați că f este injectivă.
- c) Arătați că f este impară.

Soluție. a) Luăm funcția $f(x) = 0$, pentru $x = 0$ și $f(x) = \frac{1}{x}$, pentru $x \neq 0$ **2p**

b) Pentru $x = y = 0$, obținem $f(0) = 0$. Dacă există $x \neq 0$ pentru care $f(x) = 0$, atunci $0 = f(0) = f((f(x))^2 y) = x^3 f(xy)$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$, deci pentru $y = \frac{z}{x}$, avem $f(z) = 0$. Deducem că f este constantă, contradicție. Atunci $f(x) \neq 0$, pentru orice $x \neq 0$ **1p**

Pentru $y = 1$ în relația dată, avem $f((f(x))^2) = x^3 f(x)$, deci dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ și $f(x_1) = f(x_2)$, obținem $x_1^3 = x_2^3$, deci $x_1 = x_2$. Așadar f este injectivă **1p**

c) Fie $a = f(-1)$. Pentru $x = -1$ în relația dată, avem $f(a^2y) = -f(-y)$. Atunci $f(a^4y) = f(a^2(a^2y)) = -f(-a^2y) = -f(a^2(-y)) = f(y)$. Din injectivitatea lui f deducem că $a^4y = y$, deci $a^2 = 1$. Atunci $f(-y) = -f(y)$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$... **3p**

Problema 3. Fie $S = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | 1 \leq x, y \leq 7\}$ o mulțime de puncte laticiale. Determinați numărul maxim de puncte pe care le poate avea o submulțime $T \subseteq S$ în care să **nu** existe patru puncte care să determine un dreptunghi nedegenerat, cu laturile paralele la axe.

Cristi Săvescu

Soluție. Fie T o mulțime cu proprietatea dată și $t = |T|$. Pentru fiecare coloană $j = 1, 2, \dots, 7$, notăm cu a_j numărul de puncte din T aflate pe coloana j . Atunci $\sum_{j=1}^7 a_j = t$. Pentru fiecare $j = 1, 2, \dots, 7$, numărul de perechi de rânduri care au amândouă puncte din T pe coloana j este $\frac{a_j(a_j-1)}{2}$, iar când privim în ansamblu aceste perechi pentru toate coloanele, conform restricției din ipoteză ne rezultă că nu există două coloane care să aibă o aceeași pereche de rânduri, altfel am obține un dreptunghi. Atunci, din principiul includerii și excluderii, obținem că $\sum_{j=1}^7 \frac{a_j(a_j-1)}{2}$ nu depășește numărul total de perechi de rânduri, care este $\frac{7 \cdot 6}{2}$. Atunci $42 \geq \sum_{j=1}^7 a_j(a_j - 1) = \sum_{j=1}^7 a_j^2 - t \geq \frac{1}{7}t^2 - t$, deci $t^2 - 7t - 294 \leq 0$, care se scrie $(t + 14)(t - 21) \leq 0$. Atunci deducem că $t \leq 21$ **4p**

Pentru a arăta că $t = 21$ verifică, considerăm următoarea construcție:

1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0

..... **3p**

Problema 4. a) Fie $x \in (0, \infty)$ cu proprietatea că $\sqrt[n]{x}$ este număr rațional, pentru o infinitate de valori ale lui $n \geq 2$. Arătați că $x = 1$.

b) Fie $x, y \in (0, \infty)$ cu proprietatea că $\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} \in \mathbb{Q}$ este număr rațional, pentru orice $n \geq 2$. Arătați că $x = y = 1$.

Sorin Rădulescu și Marius Rădulescu

Soluție. a) În particular, x este rațional, deci fie $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$, astfel încât $x = \frac{a}{b}$. Atunci, pentru fiecare n pentru care $\sqrt[n]{x}$ este număr rațional, există numerele naturale nenule a_n, b_n , $(a_n, b_n) = 1$, pentru care $\frac{a}{b} = \frac{a_n^n}{b_n^n}$, care se scrie $ab_n^n = ba_n^n$. Dacă $a \neq 1$, fie p un număr prim cu $p|a$. Atunci $v_p(a) + nv_p(b_n) = v_p(b) + nv_p(a_n)$. Din

$(a, b) = 1$ deducem că $v_p(b) = 0$. Atunci $v_p(a) = n(v_p(a_n) - v_p(b_n))$, deci $n|v_p(a)$, în particular $a \geq p^n \geq 2^n$ **2p**

Cum proprietatea dată are loc pentru o infinitate de valori ale lui n , rezultă că $a \geq 2^n$, pentru o infinitate de valori ale lui n . Dar $a \geq 2^n$ are loc doar când $n \leq \log_2 a$, contradicție. Așadar, $a = 1$. Analog se arată că $b = 1$, de unde rezultă concluzia **1p**

b) Fie $x_n = \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$. Atunci $x_{n+1}^2 = x_n + 2(xy)^{\frac{1}{2n}}$, deci $(xy)^{\frac{1}{2n}} \in \mathbb{Q}$, pentru orice $n \geq 2$, iar conform a), avem $xy = 1$ **1p**

Atunci $x_{n+1}^2 = x_n + 2$ și $x_n \in \mathbb{Q}$, pentru orice $n \geq 1$. Atunci scriem $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, unde $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$ și $(p_n, q_n) = 1$ și $\frac{p_{n+1}^2}{q_{n+1}^2} = \frac{p_n}{q_n} + 2$, deci $p_{n+1}^2 q_n = q_{n+1}^2 (p_n + 2q_n)$, deci $q_{n+1}^2 | q_n$, în particular $q_{n+1} \leq \sqrt{q_n}$. Deducem că $q_n \leq q_1^{2^{-n}}$. Pentru n suficient de mare, avem $q_n < 2$, iar cum $q_n \in \mathbb{N}^*$, există N pentru care avem $q_n = 1$, pentru orice $n > N$. **2p**

Atunci $p_{n+1}^2 = p_n + 2$, pentru orice $n > N$. Observăm că $p_n = x_n \geq 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Dacă nu există $n > N$ pentru care $p_n = 2$, atunci $p_{n+1} < p_n$ este echivalent cu $p_n^2 > p_n + 2$, adică $(p_n - 2)(p_n + 1) > 0$, care este adevărat, ceea ce implică faptul că șirul de numere naturale $(p_n)_{n \geq N}$ este strict descrescător, imposibil. Atunci avem $p_n = 2$, deci $x_n = 2$. Cum $x_n = \sqrt[n]{x} + \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \geq 2$, cu egalitate când $x = 1$, obținem că $x = 1$, apoi $y = 1$ **1p**